

*L.S. M.Messaâdi Nabeul
Ben Sidhom Mongi*

DEVOIR DE SYNTHESE N°1
3^{ème} Sc-Tech

*Le 16/12/2015
Durée : 2heures*

Exercice n°1(3pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1°) la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable à droite en 0

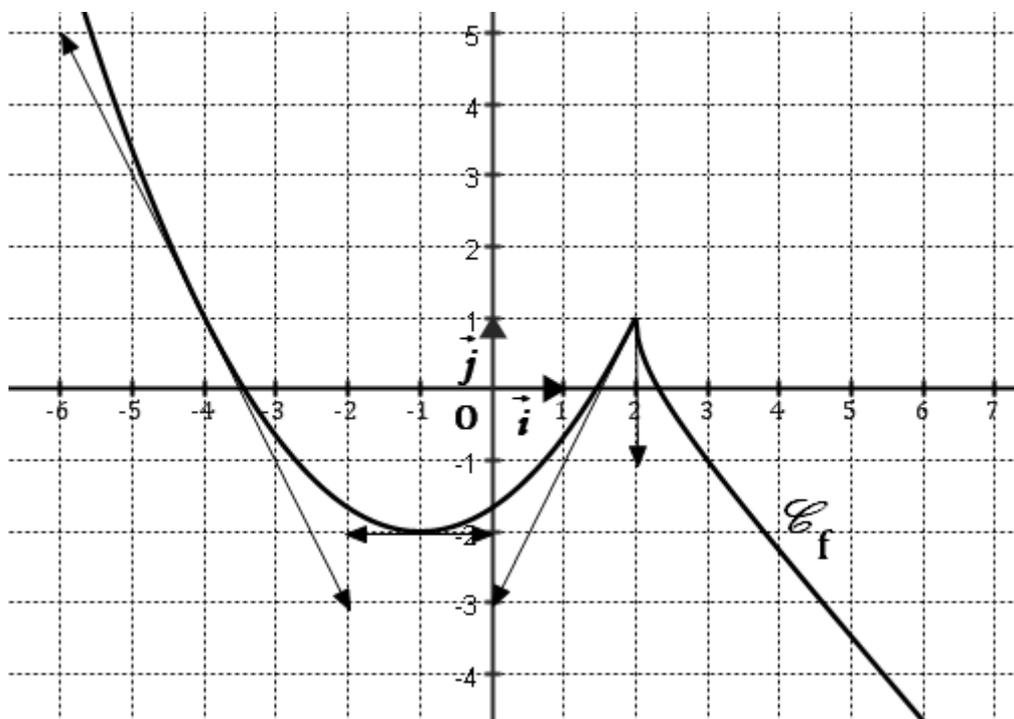
2°) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^3 + x + 14}{4 - x^2} = 6$

3°) $\cos\left(\frac{\pi}{19}\right) = \sin\left(\frac{17\pi}{38}\right)$

4°) $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = 2 \sin\left(\frac{10\pi}{21}\right)$

Exercice n°2 (4,5 pts)

La figure ci contre est la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R}



Par lecture graphique déterminer

1°) $f(-4)$; $f(-1)$; $f(2)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2015}{1 + f(x)}$

2°) a) $f'(-1)$, $f'(-4)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

b) Ecrire l'équation de la tangente à C_f au point $(-4, f(-4))$

3°) Tracer dans le même repère la courbe de la fonction $h: x \mapsto 2 - f(x)$

4°) l'expression de $f(x)$ sur $[2, +\infty[$ est : $f(x) = 1 - 2\sqrt{\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x}$

Montrer que f est dérivable en 3 et déterminer $f'(3)$

Exercice n°3 (7pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{7\}$ par
$$\begin{cases} f(x) = -2 + \sqrt{4x^2 - 13x + 9} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{3x^2 - 9x + 2}{3 - x} & \text{si } x \geq 1 \text{ et } x \neq 3 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 3x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Montrer que la fonction est f continue en 1 ?

4) a) Etudiez la dérivabilité de f à gauche en 1.

b) Etudiez la dérivabilité de f à droite en 1.

c) Construire les demi tangentes à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

5) a) Montrer que f est dérivable en 0.

b) Ecrire l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

Exercice n°4 (5.5pts)

1) On donne $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

a) Calculer: $f(\frac{\pi}{3})$, $f(\frac{\pi}{12})$ et $f(\frac{27\pi}{4})$

b) Montrer que $f(x) = 2\cos(2x + \frac{2\pi}{3})$

c) Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $]-\pi ; \pi]$ l'équation $f(x) = 0$

2) Soit $g(x) = \frac{f(x)}{1 + \sin(2x + \frac{2\pi}{3})}$

a) Déterminer le domaine de définition de g .

b) Montrer que $g(x) = \frac{2(\cos(x + \frac{\pi}{3}) - \sin(x + \frac{\pi}{3}))}{\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{3})}$

Formules

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$